
Correction de la fiche 1 de calcul

Du calcul avec de vrais nombres

Exercice 1 — Simplification de racines

1. Simplifions $\sqrt{8}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{8} &= \sqrt{4 \times 2} \\ &= \sqrt{4}\sqrt{2} \\ &= \boxed{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

2. Simplifions $\sqrt{12}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{12} &= \sqrt{4 \times 3} \\ &= \sqrt{4}\sqrt{3} \\ &= \boxed{2\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

3. Simplifions $\sqrt{9 + 18}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{9 + 18} &= \sqrt{27} \\ &= \sqrt{9 \times 3} \\ &= \sqrt{9}\sqrt{3} \\ &= \boxed{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

4. Simplifions $\sqrt{1024}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{1024} &= \sqrt{2^{10}} \\ &= 2^5 \\ &= \boxed{32}.\end{aligned}$$

5. Simplifions $2\sqrt{6}\sqrt{6}$:

$$\begin{aligned}2\sqrt{6}\sqrt{6} &= 2\left(\sqrt{6}\right)^2 \\ &= 2 \times 6 \\ &= \boxed{12}.\end{aligned}$$

6. Simplifions $\sqrt{\frac{15}{27}}$:

$$\sqrt{\frac{15}{27}} = \sqrt{\frac{3 \times 5}{3 \times 9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{3}}.$$

Exercice 2 — Simplification de fractions

1. Calculons $\frac{10}{9} - 1$ par mise au même dénominateur :

$$\frac{10}{9} - 1 = \frac{10}{9} - \frac{9}{9} = \boxed{\frac{1}{9}}.$$

2. Calculons $-\frac{13}{4} + \frac{17}{6}$ par mise au même dénominateur :

$$\begin{aligned} -\frac{13}{4} + \frac{17}{6} &= -\frac{13 \times 3}{4 \times 3} + \frac{17 \times 2}{6 \times 2} \\ &= -\frac{39}{12} + \frac{34}{12} \\ &= \frac{-39 + 34}{12} \\ &= \boxed{-\frac{5}{12}}. \end{aligned}$$

3. Calculons $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$:

$$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \boxed{2}.$$

4. Calculons $-\frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{3}{2}$ par mise au même dénominateur :

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{3}{2} &= \frac{-2 \times 5 + 3 \times 3}{3 \times 5} - \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{15} - \frac{3}{2} \\ &= -\left(\frac{1}{15} + \frac{3}{2}\right) \\ &= -\frac{2 + 3 \times 15}{2 \times 15} \\ &= \boxed{-\frac{47}{30}}. \end{aligned}$$

Exercice 3 — Décomposer pour mieux simplifier

1. Calculons $\frac{2 \times 3}{5} \times \frac{5 \times 7}{3}$:

$$\frac{2 \times 3}{5} \times \frac{5 \times 7}{3} = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{5 \times 3} = 2 \times 7 = \boxed{14}.$$

2. Calculons $\frac{16}{3} \times \frac{21}{4}$:

$$\begin{aligned}\frac{16}{3} \times \frac{21}{4} &= \frac{4 \times 4}{3} \times \frac{3 \times 7}{4} \\ &= 4 \times 7 \\ &= \boxed{28}.\end{aligned}$$

3. Calculons $\frac{1}{12} \times \frac{60}{23}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{12} \times \frac{60}{23} &= \frac{1}{12} \times \frac{5 \times 12}{23} \\ &= \boxed{\frac{5}{23}}.\end{aligned}$$

Exercice 4 — Des puissances et du logarithme

1. (a) Comme $\ln(e) = 1$, on a :

$$[2 \ln(e)]^5 = 2^5 = \boxed{32}.$$

(b) Calculons $\sqrt{3^2 \times 4^2}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{3^2 \times 4^2} &= \sqrt{(3 \times 4)^2} \\ &= \sqrt{12^2} \\ &= |12| \\ &= \boxed{12} \text{ car } 12 \text{ est positif.}\end{aligned}$$

(c) Calculons $4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3$:

$$\begin{aligned}4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 &= 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2+1} \\ &= 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 4 \times \frac{(\sqrt{3})^2}{2^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 4 \times \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{2}}.\end{aligned}$$

2. Simplifions le nombre $-3 \ln \left(\frac{1}{2} \right)$:

$$\begin{aligned}
 -3 \ln \left(\frac{1}{2} \right) &= -3 [\ln(1) - \ln(2)] \\
 &= -3 [-\ln(2)] \quad \text{car } \ln(1) = 0 \\
 &= 3 \ln(2) \\
 &= \ln(2^3) \\
 &= \boxed{\ln(8)}
 \end{aligned}$$

Comme la fonction $\ln$ est strictement croissante, elle ne prend jamais deux fois la même valeur (on dit alors qu'elle est *injective*), donc

(a) $\ln \left(\frac{3}{2} \right) \neq \ln(8)$ (puisque $\frac{3}{2} \neq 8$), donc $\boxed{\ln \left(\frac{3}{2} \right) \neq -3 \ln \left(\frac{1}{2} \right)}$;

(b) $\ln(6) \neq \ln(8)$ (puisque $6 \neq 8$), donc $\boxed{\ln(6) \neq -3 \ln \left(\frac{1}{2} \right)}$.

3. (a) Exprimons $\ln(25)$ en fonction de $\ln(5)$:

$$\ln(25) = \ln(5^2) = \boxed{2 \ln(5)}.$$

- (b) Exprimons $\ln(\sqrt{2})$ en fonction de $\ln(2)$:

$$\ln(\sqrt{2}) = \ln(2^{\frac{1}{2}}) = \boxed{\frac{1}{2} \ln(2)}.$$

Sans utiliser de puissances non entières, on obtient aussi le résultat en remarquant que

$$\ln(2) = \ln \left[\left(\sqrt{2} \right)^2 \right] = 2 \ln(\sqrt{2}).$$

- (c) Exprimons $\ln \left(\frac{1}{20} \right)$ en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(5)$:

$$\begin{aligned}
 \ln \left(\frac{1}{20} \right) &= \ln(1) - \ln(20) \\
 &= -\ln(20) \quad \text{car } \ln(1) = 0 \\
 &= -\ln(4 \times 5) \\
 &= -[\ln(4) + \ln(5)] \\
 &= -[\ln(2^2) + \ln(5)] \\
 &= -[2 \ln(2) + \ln(5)] \\
 &= \boxed{-2 \ln(2) - \ln(5)}.
 \end{aligned}$$

4. (a) Simplifions $\log(100)$:

$$\log(100) = \log(10^2) = \boxed{2}.$$

- (b) Simplifions $-\log\left(\frac{1}{10^2}\right)$:

$$\begin{aligned} -\log\left(\frac{1}{10^2}\right) &= -\log(10^{-2}) \\ &= -(-2) \\ &= \boxed{2}. \end{aligned}$$

- (c) Simplifions $\log(3 \times 10^{-3})$:

$$\begin{aligned} \log(3 \times 10^{-3}) &= \log(3) + \log(10^{-3}) \\ &= \boxed{\log(3) - 3}. \end{aligned}$$

Du calcul avec de vraies lettres

Exercice 5 — Des puissances de un

Remarquons que

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}, 1^m = 1}.$$

Soit n un entier naturel.

1. On a donc $\boxed{1^{n+1} = 1}$.
2. Comme $1^{2n} = 1$, on a $\boxed{-1^{2n} = -1}$.
3. Calculons $(-1)^{2n}$:

$$\begin{aligned} (-1)^{2n} &= [(-1)^2]^n \\ &= 1^n \text{ car } (-1)^2 = 1 \\ &= \boxed{1}. \end{aligned}$$

4. Calculons $(-1)^{4n+3}$:

$$\begin{aligned} (-1)^{4n+3} &= (-1)^{2(2n+1)+1} \\ &= (-1)^{2(2n+1)} \times (-1) \\ &= [(-1)^2]^{2n+1} \times (-1) \\ &= 1^{2n+1} \times (-1) \\ &= \boxed{-1}. \end{aligned}$$

Plus généralement, pour tout entier m , on a :

$$\boxed{(-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases}}$$

5) Calculons 1^{-n} :

$$1^{-n} = \frac{1}{1^n} = \frac{1}{1} = \boxed{1}.$$

6) Remarquons que comme $2n$ est pair, on a :

$$(-1)^n \times (-1)^n = (-1)^{2n} = 1,$$

donc, en divisant par $(-1)^n$, on obtient que

$$\boxed{\frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n}.$$

7) Calculons $2^n \times 1^n$:

$$2^n \times 1^n = 2^n \times 1 = \boxed{2^n}.$$

8) Comme $1^{n+1} = 1$, on a : $\boxed{2 \times 1^{n+1} = 2}$.

9) Calculons $1^n + 1^{-n}$:

$$1^n + 1^{-n} = 1 + 1 = \boxed{2}.$$

10) Simplifions $(-1)^{n+2}$:

$$\begin{aligned} (-1)^{n+2} &= (-1)^n \times (-1)^2 \\ &= (-1)^n \times 1 \\ &= \boxed{(-1)^n}. \end{aligned}$$

(a) Comme

$$(-1)^{n+1} = (-1)^n \times (-1) = -(-1)^n,$$

et comme $(-1)^n$ est non nul, $(-1)^{n+1} \neq (-1)^n$, donc $\boxed{(-1)^{n+1} \neq (-1)^{n+2}}$.

(b) De même, $\boxed{-(-1)^n \neq (-1)^{n+2}}$.

Exercice 6 — Plus de puissance

Soient a un réel non nul, x un réel strictement positif et n un entier naturel.

1. (a) Simplifions 2×4^n :

$$\begin{aligned} 2 \times 4^n &= 2 \times (2^2)^n \\ &= 2 \times 2^{2n} \\ &= \boxed{2^{2n+1}}. \end{aligned}$$

(b) Calculons $2^n + 2^n$ en factorisant par 2^n :

$$\begin{aligned} 2^n + 2^n &= 2^n(1 + 1) \\ &= 2^n \times 2 \\ &= \boxed{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

2. Calculons $e^{-\ln(x)}$:

$$e^{-\ln(x)} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \boxed{\frac{1}{x}}.$$

3. Simplifions $\frac{x^2}{\sqrt{x}}$:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\sqrt{x}} &= \frac{x \times x}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x \times (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} \\ &= \boxed{x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

4. (a) Simplifions $\frac{a^{n^2}}{a^n}$:

$$\frac{a^{n^2}}{a^n} = a^{n^2-n} = \boxed{a^{n(n-1)}}.$$

(b) Simplifions $\frac{(a^n)^2}{a^n}$:

$$\frac{(a^n)^2}{a^n} = \frac{a^n \times a^n}{a^n} = \boxed{a^n}.$$

(c) On a :

$$\boxed{(a^{n^2})^3 = a^{3n^2}}.$$

Exercice 7 — Simplification de fractions

1. • La fonction $a \mapsto \frac{2a}{a}$ est définie sur l'ensemble suivant :

$$\{a \in \mathbb{R} \mid a \neq 0\} = \boxed{\mathbb{R}^*}.$$

• Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

Alors on a :

$$\boxed{\frac{2a}{a} = 2}.$$

2. • Donnons tout d'abord l'ensemble de définition de la fonction

$$(a, b) \mapsto \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a}.$$

Elle est définie sur l'ensemble suivant :

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a+b \neq 0 \text{ et } a \neq 0\} = \boxed{\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq 0 \text{ et } b \neq -a\}}.$$

- Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$ et $b \neq -a$.

Alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a} &= \frac{a}{a(a+b)} - \frac{a+b}{a(a+b)} \\ &= \frac{a - (a+b)}{a(a+b)} \\ &= \frac{a - a - b}{a(a+b)} \\ &= \boxed{-\frac{b}{a(a+b)}}. \end{aligned}$$

3. • Donnons tout d'abord l'ensemble de définition de la fonction

$$(a, b) \mapsto \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2}.$$

Elle est définie sur l'ensemble suivant :

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 - b^2 \neq 0\}.$$

Or, pour tous réels a et b , on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 = 0 &\iff (a-b)(a+b) = 0 \\ &\iff a-b = 0 \text{ ou } a+b = 0 \\ &\iff a = b \text{ ou } a = -b, \end{aligned}$$

donc la fonction $(a, b) \mapsto \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$ est définie sur

$$\boxed{\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq b \text{ et } a \neq -b\}}.$$

- Soient a et b deux réels tels que $a \neq b$ et $a \neq -b$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} &= \frac{(a+b)^2}{(a-b)(a+b)} \\ &= \boxed{\frac{a+b}{a-b}}. \end{aligned}$$

4. • Donnons le domaine de définition de la fonction

$$(a, b) \mapsto \frac{a}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

★ La fonction $(a, b) \mapsto \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ est définie sur l'ensemble suivant :

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq 0 \text{ et } b \neq 0\} = \boxed{(\mathbb{R}^*)^2}.$$

★ Pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} \\ &= \boxed{\frac{a+b}{ab}}. \end{aligned}$$

★ Ainsi, la fonction $(a, b) \mapsto \frac{a}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ est définie sur l'ensemble suivant :

$$\begin{aligned} \left\{ (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2 \mid \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq 0 \right\} &= \left\{ (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2 \mid \frac{a+b}{ab} \neq 0 \right\} \\ &= \left\{ (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2 \mid a+b \neq 0 \right\} \\ &= \boxed{\left\{ (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2 \mid a \neq -b \right\}}. \end{aligned}$$

- Soient a et b deux réels non nuls tels que $a \neq -b$.

Alors, d'après le calcul précédent, on a :

$$\begin{aligned} \frac{a}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} &= \frac{a}{\frac{a+b}{ab}} \\ &= a \times \frac{ab}{a+b} \\ &= \boxed{\frac{a^2b}{a+b}}. \end{aligned}$$

5. • Donnons le domaine de définition de la fonction

$$(a, b) \mapsto \frac{(-a)^2 - 2ab + (-b)^2}{-a^2 - 2ab - b^2}.$$

Elle est définie sur l'ensemble

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid -a^2 - 2ab - b^2 \neq 0\}.$$

Or, pour tous réels a et b , on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} -a^2 - 2ab - b^2 = 0 &\iff -(a^2 + 2ab + b^2) = 0 \\ &\iff a^2 + 2ab + b^2 = 0 \\ &\iff (a+b)^2 = 0 \\ &\iff a+b = 0 \\ &\iff a = -b, \end{aligned}$$

donc la fonction $(a, b) \mapsto \frac{(-a)^2 - 2ab + (-b)^2}{-a^2 - 2ab - b^2}$ est définie sur

$$\boxed{\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq -b\}}.$$

- Soient a et b deux réels tels que $a \neq -b$.

Alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{(-a)^2 - 2ab + (-b)^2}{-a^2 - 2ab - b^2} &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{-(a^2 + 2ab + b^2)} \\ &= \frac{(a - b)^2}{-(a + b)^2} \\ &= \boxed{-\left(\frac{a - b}{a + b}\right)^2}. \end{aligned}$$

6. • Donnons le domaine de définition de la fonction

$$(a, b) \mapsto \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a + b}}.$$

- ★ La fonction $(a, b) \mapsto \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a + b}$ est définie sur

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq 0 \text{ et } b \neq 0 \text{ et } a + b \neq 0\},$$

c'est-à-dire sur

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq 0 \text{ et } b \neq 0 \text{ et } a \neq -b\}.$$

- ★ Pour tous réels a et b non nuls tels que $a \neq -b$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a + b} &= \frac{a + b}{ab} - \frac{4}{a + b} \\ &= \frac{(a + b)(a + b) - 4ab}{ab(a + b)} \\ &= \frac{(a^2 + 2ab + b^2) - 4ab}{ab(a + b)} \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab(a + b)} \\ &= \boxed{\frac{(a - b)^2}{ab(a + b)}}. \end{aligned}$$

- ★ Ainsi, pour tous réels a et b non nuls tels que $a \neq -b$, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a + b} = 0 &\iff \frac{(a - b)^2}{ab(a + b)} = 0 \\ &\iff (a - b)^2 = 0 \\ &\iff a - b = 0 \\ &\iff a = b, \end{aligned}$$

donc la fonction $(a, b) \mapsto \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b}}$ est définie sur

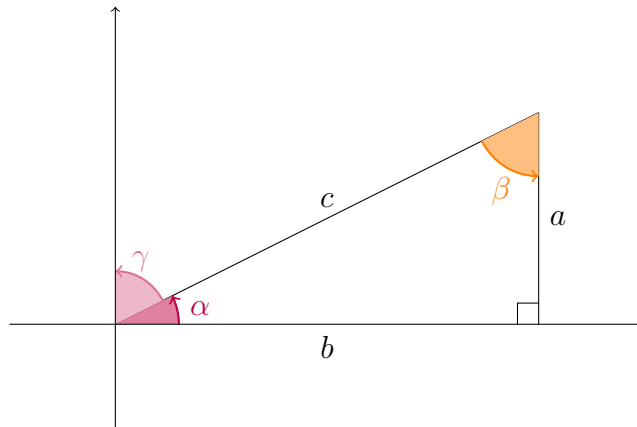
$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq 0 \text{ et } b \neq 0 \text{ et } a \neq -b \text{ et } a \neq b\}.$$

- Soient a et b deux réels non nuls tels que $a \neq b$ et $a \neq -b$.

Alors, d'après le calcul mené au point précédent, on a :

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b}} = \frac{1}{\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}} = \boxed{\frac{ab(a+b)}{(a-b)^2}}.$$

Exercice 8 — De la trigo dans une vraie figure



1. On a $\boxed{\sin(\alpha) = \frac{a}{c}}.$

2. Calculons $\tan(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \\ &= \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} \\ &= \frac{a}{c} \times \frac{c}{b} \\ &= \boxed{\frac{a}{b}}. \end{aligned}$$

3. On a $\boxed{\cos(\beta) = \frac{a}{c}}.$

4. Calculons $\sin(\gamma)$:

$$\begin{aligned}\sin(\gamma) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= \cos(\alpha) \\ &= \boxed{\frac{b}{c}}.\end{aligned}$$